Fen-Edebiyat Fakültesi	**FİNAL SINAV KAĞIDI**	
Ad Soyadı:	Bölümü: Matematik	NOTU
Numarası:	Dersin Adı: Kısmi Türevli Denklemler	
İmza:	Sınav Tarihi: 24 Ocak 2025	

Süre 75dk. Formüller:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\big(f(x+ct)+f(x-ct)\big) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(\xi)\,d\xi.$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\!\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-k(n\pi/L)^2 t}, \qquad A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\!\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx.$$

1. (20 puan)

$$u_{tt} - u_{xx} = 6x + 4e^{2t}$$
$$u(x,0) = x - x^3 \qquad u_t(x,0) = 1$$

başlangıç değer probleminin çözümünü $(x,t) = (1,1)$'de hesaplayın.

$u(1,1) =$

Çözüm: Özel çözüm. $v = F(t)+G(x)$, $F_{tt} = 4e^{2t}$ ve, $-G_{xx} = 6x$ şeklinde bir çözüm ararsak $F = e^{2t}$, $G = -x^3$ ve

$$v = e^{2t} - x^3$$

buluruz. Yani $v_{tt} - v_{xx} = 6x + 4e^{2t}$ olur.

Şimdi $w = u - v$ yazalım.

$w_{tt} - w_{xx} = u_{tt} - u_{xx} - (v_{tt} - v_{xx}) = 0$

$w(x,0) = u(x,0) - v(x,0) = x - x^3 - (1 - x^3) = x - 1 = f(x)$

$w_t(x,0) = u_t(x,0) - v_t(x,0) = 1 - 2 = -1 = g(x)$

d'Alambert çözümüne göre $(c = 1)$

$$\begin{aligned} w(x,t) &= \frac{1}{2}\left((x+t-1)+(x-t-1)\right) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} -1\,d\xi \\ &= x - 1 - \frac{1}{2}\left((x+t)-(x-t)\right) \\ &= x - 1 - t \end{aligned}$$

Buradan

$$u = w + v = x - 1 - t + e^{2t} - x^3 \implies u(1,1) = e^2 - 2$$

2. (30 puan) $z_{xx}+z_{yy}+z_x = xy+12e^{x+2y}$ denkleminin özel bir çözümünü ters görüntü yöntemiyle elde edin.

$z(x,y) =$

Çözüm: $L = D_x^2 + D_y^2 + D_x$,

$Lz_1 = xy$,

$Lz_2 = 3e^{x+2y}$.

$z_2 = Ae^{x+2y}$,

$Lz_2 = (1+4+1)Ae^{x+2y} = 12e^{x+2y}$. Buradan $A = 2$ olur

$$\begin{aligned}
z_1 &= \frac{1}{D_x}\frac{1}{1+\frac{D_y^2}{D_x}+D_x}\big(xy\big) = \frac{1}{D_x}\left(I-\left(\frac{D_y^2}{D_x}+D_x\right)+\left(\frac{D_y^2}{D_x}+D_x\right)^2-\cdots\right)(xy)\\
&= \frac{1}{D_x}\left(I-\left(\frac{D_y^2}{D_x}+D_x\right)+\left(\frac{D_y^4}{D_x^2}+2D_y^2+D_x^2\right)-\cdots\right)(xy) = \frac{1}{D_x}\big((xy)-\big(y\big)+0\big)\\
&= \frac{x^2y}{2}-xy
\end{aligned}$$

$$z = z_1 + z_2 = \frac{x^2y}{2} - xy + 2e^{x+2y}$$

3. (20 puan)

$$u_t = 3u_{xx}$$

$$u(x,0) = 1$$
$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0$$

denklemi için

$$h(t) = \int_0^\pi u(x,t)\sin(3x)\,dx$$

integralini bulun.

İpucu: Her $n, m \in \mathbb{N}$ için $\int_0^\pi \sin(nx)\sin(mx)\,dx = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ \frac{\pi}{2}, & n = m \end{cases}$

$h(t) =$

Çözüm: Çözüm

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-3n^2 t}\sin(nx)$$

olarak yazılır.

$$\int_0^\pi u(x,t)\sin(3x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-3n^2 t}\int_0^\pi \sin(nx)\sin(3x)\,dx = A_3 e^{-27t}\frac{\pi}{2}$$

Burada

$$A_3 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin(3x)\cdot 1\,dx = \frac{2}{\pi}\left(\frac{1-\cos(3\pi)}{3}\right) = \frac{4}{3\pi}$$

Cevap = $\frac{2}{3}e^{-27t}$.

4. (30 puan) $u_{xx} + 2xu_{xy} + x^2 u_{yy} = 0, \quad x > 0$ denklemini

(a) Diskriminantını hesaplayarak sınıflandırın.

(b) Uygun ξ, η dönüşümleri belirleyip, $\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)}$ Jakobyenini hesaplayın.

(c) Kanonik forma dönüştürün.

Kanonik Form:

Çözüm: (a)

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} = 0$$

$$A = 1, \quad B = x, \quad C = x^2$$

$$\Delta = B^2 - AC = x^2 - (1)(x^2) = x^2 - x^2 = 0$$

Diskriminant $\Delta = 0$ olduğu için, bu bir **parabolik** diferansiyel denklemdir.

(b)

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{-B}{A} = -x$$

$$\frac{dy}{dx} + \lambda_1 = 0 \implies \xi = y - \frac{1}{2}x^2$$

$\eta = x$ seçelim.

$$\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)} = \xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x = -1 \neq 0$$

(c)

$u_x = -xu_\xi + u_\eta,$

$u_{xx} = -u_\xi - x(-xu_{\xi\xi} + u_{\xi\eta}) - xu_{\eta\xi} + u_{\eta\eta}$

$u_y = u_\xi,$

$u_{yy} = u_{\xi\xi},$

$u_{xy} = -xu_{\xi\xi} + u_{\xi\eta}.$

$$0 = \left(x^2 u_{\xi\xi} - 2xu_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} - u_\xi\right) + 2x\left(-xu_{\xi\xi} + u_{\xi\eta}\right) + x^2 u_{\xi\xi}$$

Kanonik form:

$$u_{\eta\eta} - u_\xi = 0$$